Maths III. Séance de TP 1.

Exercice 1: Trouver les points fixes de la fonction

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

Faites le graph de f en précisant la tangence aux points fixes.

Exercice 2: Soit la fonction suivante

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{4} \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Cette fonction admet-elle des points fixes? Si la réponse est non, identifiez la ou les hypothèses du théorème de Brouwer qui ne sont pas satisfaites.

Exercice 3: Démontrez que l'intersection infinie d'ensembles ouverts n'est pas nécéssairement un ensemble ouvert. Quant est-il de l'union infinie d'ensemble ouverts?

Exercice 4: Démontrez que l'union infinie d'ensembles fermés n'est pas nécéssairement un ensemble fermé. Quant est-il de l'intersection infinie d'ensemble fermés?

Exercice 5:

Un étudiant a un revenu à la période 1, noté y_1, et anticipe des revenus futurs en période 2 de y_2. Cet étudiant planifie de dépenser c_1 en consommation en période 1 et c_2 en période 2, afin de maximiser la fonction

$$\ln c_1 + \frac{1}{1+\delta} \ln c_2$$

avec δ le taux d'escompte. (Donc si $\delta = 0$, $\frac{1}{1+\delta}$ est égal a 1. Ceci veut dire que l'étudiant évalue la consommation dans le futur au même niveau que la consommation dans le présent. C'est une mesure de l'impatience. Plus $\frac{1}{1+\delta}$ est proche de 0, plus l'étudiant est interessé a consommer maintenant.)

Si il emprunte maintenant, c'est à dire que $c_1 > y_1$, alors sa consommation en période 2 (apres avoir repayé le remboursement du prêt $c_1 - y_1$, avec taux d'interêt r) est

$$c_2 = y_2 - (1+r)(c_1 - y_1)$$

Par contre, si il épargne en période 1, alors sa consommation en période 2 est

$$c_2 = y_2 + (1+r)(y_1 - c_1)$$

(On suppose que le taux d'interêt sur les prêts et sur l'épargne est le même).

Trouver le plan optimal d'emprunt ou d'épargne.

Exercice 6:
On a la fonction suivante;

$$C = 20q - 4q(25 - \frac{1}{2}x)^{\frac{1}{2}}, \text{ avec } x < 50$$

A l'aide de la règle de la chaine,trouver $\frac{dC}{dx}$.

Exercice 7:
On a la fonction suivante:

$$p(x) = (x-a)^2 q(x)$$

Si la fonction q est différentiable au point $x = a$, montrer que $\frac{dp}{dx}(a) = 0$.

Exercice 8:
Soit l'équation suivante:

$$x\sqrt{y} = 2, \text{ avec } x > 0 \text{ et } y > 0.$$

Grapher y comme fonction (implicite) de x, dans l'espace (x, y). Trouver une expression pour $\frac{dy}{dx}$.

Exercice 9:
Soit la fonction

$$f(x) = \frac{3}{x^4 - x^2 + 1}$$

Trouver tous les maximums et minimums locaux de f. Cette fonction admet-elle des extremums globaux?