Maths III. Séance de TP 3.

Exercice 1:

Déterminer si les fonctions suivantes sont quasi-concaves, quasi-convexes ou bien les deux.

a) $f(x,y) = ye^{-x}$ où le domaine de f est $\mathbb{R}^2$. La réponse est-elle la même si le domaine est $\mathbb{R}^2_+$?

b) $f(x,y) = (2x+3y)^3$ où le domaine de f est $\mathbb{R}^2$.

c) $f(x,y) = \frac{y}{x^2+1}$ où le domaine de f est $\mathbb{R}^2$.

d) $f(x,y) = yx^{-2}$ où le domaine de f est $\mathbb{R}^2_+$.

Exercice 2:

On a les deux fonctions suivantes,

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= x^{1/3}y^{1/3}, \text{ et} \\ u_2(x,y) &= x^2y^2 \end{aligned}$$

Pour chacune de ces deux fonctions, déterminer si elle est concave ou seulement quasi-concave. Pour ces deux fonctions, les courbes de niveau (pour tout niveau donne $c > 0$) sont-elles convexes? Strictement convexes?

On sait que la concavité est une notion ordinale si, étant donnée n'importe quelle fonction concave f, la concavité etait preservée pour n'importe quelle transformation monotone croissante de f.

Déduisez-en que la concavité n'est pas une notion ordinale. (calculer les taux marginaux de substitution de ces fonctions, c'est à dire $|\frac{dy}{dx}|$, pourrait se révéler utile!).

Exercice 3:

On a l'équation suivante,

$$x^2 - xy^3 + y^5 = 17$$

a) est-ce que cette équation détermine y comme fonction implicite de x au voisinage de $(x,y) = (5,2)$.

b) Estimer la valeur de y correspondant a $x = 4.8$.

Exercice 3:

Soit la fonction suivante,

$$F(x_1,x_2,y) = x_1^2 - x_2^2 + y^3$$

a) si $x_1 = 6$ et $x_2 = 3$, trouver y qui satisfait $F(6,3,y) = 0$

b) Est-ce que cette équation définit y comme une fonction implicite de x_1 et x_2 au voisinage de $x_1 = 6$ et $x_2 = 3$?

c) Si oui, calculer $\frac{\partial y}{\partial x_1}(6,3)$ et $\frac{\partial y}{\partial x_2}(6,3)$

d) si x_1 augmente de 0.2 et x_2 diminue de 0.1, estimer le changement de y correspondant

Exercice 4:
Soit l'équation suivante,

$$x^3 + 3y^2 + 4xz^2 - 3z^2y = 1$$

Est-ce que cette relation définit z comme fonction implicite de x et y,
a) dans un voisinage de $x = 1$, $y = 1$?
b) dans un voisinage de $x = 1$, $y = 0$?
c) dans un voisinage de $x = 0.5$, $y = 1$?
Pour chaque cas, si la réponse est positive, calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en ce point.

Exercice 5:
Soit la fonction suivante,

$$f(x, y) = x^2 e^y$$

a) Quelle est la pente de la courbe de niveau au point $(x, y) = (2, 0)$?
b) Dans quelle direction doit-on se déplacer, à partir du point $(2, 0)$, afin d'augmenter la valeur de f le plus rapidement possible? Exprimer votre réponse à l'aide d'un vecteur de longeur 1.

Exercice 6:
Soit le systeme d'équations suivant,

$$\begin{aligned} xz^3 + y^2v^4 &= 2 \\ xz + yvz^2 &= 2 \end{aligned}$$

Ce systeme définit-il v et z comme fonctions implicites de x et y autour du point $(1, 1, 1, 1)$?
Si oui, trouver $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ en ce point.