Maths III. Séance de TP 4.

Exercice 1:

Soit le système suivant à deux équations et trois inconnues:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ 3x^2yz &= 12 \end{aligned}$$

a) Au point $(x, y, z) = (2, 1, 1)$, pourquoi pouvez-vous traiter z comme variable éxogène et x, y comme variables endogènes?

b) Si z augmente à 1.2,estimez les valeurs de x et y correspondantes.

Exercice 2:

Une firme utilise deux inputs x et y pour produire un bien z via une fonction de production cobb-douglas $z = x^a y^b$ avec $a = b = 0.5$. La combinaison d'inputs utilisée par la firme est $x = 25$ et $y = 100$. La firme bénéficie d'une innovation technologique qui modifie le paramètre b. Maintenant $b = 0.504$, alors que a reste constant à $a = 0.5$.

Estimez la combinaison d'inputs qui maintiendra a) l'output total z à son niveau initial et b) la somme des inputs à son niveau initial.

(Hint: utilisez le système $x^a y^b = c$ et $x + y = 125$).

Exercice 3:

Maximisez la fonction $f(x, y, z) = x + y + z^2$ par rapport à x, y et z, sous les contraintes $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $y = 0$. Vérifiez d'abord la contrainte de qualification (c'est à dire trouvez les points stationnaires des contraintes et verifiez si ils sont inclus dans votre ensemble contraint).

Exercice 4:

Maximisez la fonction $f(x, y, z) = yz + xz$ par rapport à x, y et z, sous les contraintes $y^2 + z^2 = 1$ et $xz = 3$. Vérifiez d'abord la contrainte de qualification.

Exercice 5:

Trouvez la distance maximale et minimale de l'origine de l'ellipse définie par $x^2 + xy + y^2 = 3$.

(Hint: Utilisez $x^2 + y^2$ comme fonction objectif à maximiser ou à minimiser).

Exercice 6:

Soit la fonction $f(x, y; a)$ où x et y sont des variables, et a est un paramètre. Soit la contrainte $g(x, y; a)$. On maximise f par rapport à x et y sous la contrainte g. La solution de ce problème est notée $(x^*(a), y^*(a))$. Démontrez que

$$\frac{d}{da} f(x^*(a), y^*(a); a) = \frac{\partial}{\partial a} f(x^*(a), y^*(a); a).$$