Maths III: Rappels sur les matrices.

Soit A une matrice symetrique $n \times n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & .. & .. & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & & .. & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Les mineurs principaux:

Une sous-matrice $k \times k$ formée, à partir de A, en éliminant $n-k$ colonnes, disons les colonnes $i_1, i_2, ..., i_{n-k}$ et les mêmes $n-k$ lignes $i_1, i_2, ..., i_{n-k}$, est appellée une sous-matrice de A, d'ordre principal k. Le déterminant d'une sous-matrice principale $k \times k$ est appellé le mineur principal d'ordre k de la matrice A.

Exemple: Soit A une matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Mineurs principaux de premier ordre: Tous les termes qui sont sur la diagonale. Pour une matrice 3×3, on a donc 3 mineurs principaux de premier ordre: a_{11}, a_{22} et a_{33}.

Mineurs principaux de second ordre: Les déterminants de toutes les sous-matrices 2×2 obtenues en éliminant la même ligne et colonne. Ceci est en légère contradiction avec ce que j'ai dit ce matin en cours, puisque j'avais ajouté un mineur principal de second ordre en trop! J'espère donc que ce document clarifiera cette question...

On a trois mineurs principaux de second ordre. Tout d'abord det $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ où la sous-matrice est obtenue en éliminant la <u>colonne 3 et la ligne 3</u>.Ensuite, det $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$, où la sous-matrice est obtenue en éliminant la <u>ligne 2 et la colonne 2</u>. Enfin, det $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, où la sous-matrice est obtenue en éliminant la <u>colonne 1 et la ligne 1</u>.

Mineurs principaux de troisième ordre: Un seul, qui est le déterminant de la matrice 3×3.

$\Rightarrow$ Donc, quand $k = 1$, les mineurs principaux sont les termes de la diagonale de la matrice A. Pour tout $k > 1$, les mineurs principaux sont les determinants des sous-matrices de A, obtenus en éliminant les mêmes $n-k$ colonnes et lignes.

Définition:

1) Une matrice A, $n \times n$ est semi-définie positive si chacun des mineurs principaux de A est ≥ 0.

2) Une matrice A, $n \times n$ est semi-définie negative si chacun des mineurs principaux d'ordre impair de A est ≤ 0, et chacun des mineurs principaux d'ordre pair de A est ≥ 0.

Les mineurs principaux dominants:

Une sous-matrice $k \times k$ forme, a partir de A, en éliminant les $n-k$ dernières colonnes et les memes $n-k$ dernières lignes, est appellée une sous-matrice de A, d'ordre principal dominant k. Le déterminant d'une sous-matrice principale dominante $k \times k$ est appellé le mineur principal dominant d'ordre k de la matrice A.

Exemple: Soit A une matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Mineurs principaux dominants de premier ordre: Seulement a_{11}, obtenu en éliminant les 2 dernières lignes et colonnes.

Mineurs principaux dominants de second ordre: On a seulement det $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ où la sous-matrice est obtenue en éliminant la colonne 3 et la ligne 3.

Mineurs principaux dominants de troisième ordre: Un seul, qui est le determinant de la matrice 3×3.

Definition:

1) Une matrice A, $n \times n$, est définie positive si chacun des mineurs principaux dominants de A est > 0.

2) Une matrice A, $n \times n$, est définie negative si ses n mineurs principaux dominant alternent en signe de la manière suivante

$$a_{11} < 0, \text{ det} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \text{det} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} < 0, \text{ etc...}$$